150

ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1983

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Respecter strictement la numérotation des parties et des questions, ainsi que les notations.

Bien que se rattachant à un même thème, les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre. La partie IV est indépendante des trois autres.

Un espace affine euclidien de dimension trois est rapporté au repère orthonormé direct $O\ \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ ou $Oxyz$.

Un deuxième repère $AXYZ$, de vecteurs unitaires $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ est aussi orthonormé direct. Les axes AX et AY sont dans le plan xOy ; AZ est parallèle à Oz, $\vec{K} = \vec{k}$. La mesure commune des angles $(\vec{i}, \vec{I})$ et $(\vec{j}, \vec{J})$ est $\alpha(t)$, t désignant le temps et α une fonction numérique dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $\alpha' = \dfrac{d\alpha}{dt}$; on notera $\alpha(t) = \alpha$ et $\alpha'(t) = \alpha'$.

Si M est un point du plan XAY lié au repère $AXYZ$, les vecteurs vitesses de M et de A, par rapport à $Oxyz$, vérifient :

$$\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(A)} + \overrightarrow{MA} \wedge \alpha' \vec{k}.$$

I — On suppose $\alpha' \neq 0$ sur le domaine de définition de α ; à chaque instant t de ce domaine il existe un point L défini par

$$\vec{AL} = \vec{k} \wedge \frac{\overrightarrow{V(A)}}{\alpha'}$$

Le point L est mobile dans les plans AXY et Oxy.

Calculer le vecteur vitesse du point du plan XAY lié au repère $AXYZ$, qui coïncide à l'instant t avec le point L. M étant un point quelconque du plan XAY lié au repère $AXYZ$, montrer que le vecteur vitesse de M est orthogonal au vecteur $\vec{ML}$.

On rappelle la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

.../...

II – On suppose que :

$$\overrightarrow{OA} = b\,\vec{i}\,\cot g\,\alpha \quad \text{et} \quad o < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\,, \text{ avec } b > o, \text{ b constant.}$$

1· Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{V(A)}$, vitesse de A, et $\overrightarrow{AL}$ dans le repère $O\,\vec{i}\,\vec{j}$, puis le vecteur $\overrightarrow{AL}$ dans le repère $A\,\vec{I}\,\vec{J}$ sous la forme $\overrightarrow{AL} = X\vec{I} + Y\vec{J}$, en fonction de α et de α'.

Etudier et représenter graphiquement la trajectoire (F) du point L dans le repère A X Y. On pourra utiliser une représentation paramétrique en fonction de α ou une équation cartésienne.

2 - Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OL}$ dans le repère $O\,\vec{i}\,\vec{j}$ sous la forme $\overrightarrow{OL} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, en fonction de α. Trouver l'équation cartésienne et la nature de la courbe qui porte la trajectoire (F_1) du point L dans le repère Oxy. Tracer (F_1).

3 - **a)** – Calculer les composantes X' et Y' du vecteur vitesse du point L sur la trajectoire (F). Exprimer les composantes de ce même vecteur dans le repère $O\,\vec{i}\,\vec{j}$. Comparer avec les composantes x' et y' du vecteur vitesse du point L sur sa trajectoire (F_1). Conclure.

b) – Préciser la direction du vecteur $\overrightarrow{AL}$ par rapport au repère $O\,\vec{i}\,\vec{j}$.

Faire une figure précise réunissant les repères O x y, A X Y et les courbes (F) et (F_1).

III – Soit B le point de l'axe AX défini par $\overrightarrow{BA} = a\,\vec{I}$, avec $a > o$. On suppose que le point B décrit l'axe O x et que $\overrightarrow{OB} = f(t)\,\vec{i}$, f étant une fonction dérivable sur son domaine de définition.

1 - **a)** – M étant un point quelconque du plan Oxy ou A X Y, défini par :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM} = X\vec{I} + Y\,\vec{J}$$

calculer x et y en fonction de X, Y, a, α et f (t), puis X et Y en fonction de x, y, a, α et f (t).

b) – En déduire les composantes sur O x et O y du vecteur vitesse, par rapport à O x y z, d'un point M du plan A X Y lié au repère A X Y Z.

c) – Calculer en fonction de a, α et $\frac{df}{d\alpha}$ les coordonnées X et Y du point L_o du plan A X Y lié au repère A X Y Z, dont le vecteur vitesse par rapport à O x y z est le vecteur nul.

2 - Quand t varie, les différents points L_o engendrent une courbe (F) du plan A X Y décrite par un point coïncidant, à tout instant t, avec un point L_o.

On cherche la fonction f telle que (F) soit portée par A Y. On suppose que pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, f prend la valeur a. On pourra chercher la fonction φ telle que $\alpha \longmapsto \varphi(\alpha) = f[t(\alpha)]$.

a) – Trouver $\varphi(\alpha)$.

b) – Calculer le vecteur vitesse de A dans le repère A X Y en fonction de a, α et α'. Quel est son support ?

c) – Soit A' le point défini par $\overrightarrow{AA'} = a\,\vec{I}$.

Exprimer, dans le repère O x y, le vecteur vitesse du point A' par rapport à O x y en fonction de a, α et α'. Par quelle transformation géométrique simple se déduit-il du vecteur vitesse de B ?

Faire une figure précise résumant cette question.

.../...

3 - Donner une représentation paramétrique, en fonction de α, de la trajectoire du point A dans le plan Oxy. Construire cette trajectoire.

4 - Quant t varie, les différents points L_o engendrent une courbe (F_1) du plan Oxy, décrite par un point L.

Donner une représentation paramétrique de (F_1) en fonction de α puis de $\lambda = \text{tg } \frac{\alpha}{2}$.

Donner l'équation cartésienne de (F_1) et tracer (F_1).

5 - Calculer les vecteurs vitesses du point L sur les deux trajectoires (F_1) et (F). Conclure.

Faire une figure précise réunissant les repères Oxy, AXY, les points B et L, les courbes (F) et (F_1).

IV – Le point A n'appartient plus au plan Oxy mais décrit la courbe (C) définie par :

$$\overrightarrow{OA} = R \cos \omega t. \vec{i} + R \sin \omega t. (\vec{j} + \vec{k})$$

R et ω étant deux constantes strictement positives ; $\vec{K} = \vec{k}$; α (t) est la mesure des angles $(\vec{i}, \vec{I})$ et $(\vec{j}, \vec{J})$.

1 - a) – Définir avec précision les projections de (C) sur les plans xOy, yOz et zOx ainsi que la nature et les éléments particuliers de (C).

b) – Trouver dans Oxyz l'équation du cône de sommet I (o, R, o) et dont une directrice est la courbe (C). Définir avec précision la courbe d'intersection de ce cône et du plan xOz.

2 - a) – Calculer, en fonction de R, ω et t, le rayon de courbure de (C) en un de ses points quelconques. Entre quelles limites varie ce rayon ?

Calculer les coordonnées du centre de courbure aux points où le rayon atteint un extremum.

b) – Calculer le vecteur accélération, $\overrightarrow{\Gamma(A)}$, du point A en fonction de ω et de $\overrightarrow{OA}$. Préciser la nature du mouvement de A sur (C).

3 - a) – On suppose α (t) = o.

Quelle est la trajectoire, dans le repère Oxyz, d'un point M lié au repère AXYZ ?

Entre quelles limites varie le module du vecteur vitesse de M ?

b) – On suppose α (t) = ωt.

M est un point lié au repère AXYZ, m est sa projection sur le plan AXY ; O' est le point fixe de l'axe Oz défini par $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{mM}$.

Calculer l'accélération, $\overrightarrow{\Gamma(M)}$, du point M en fonction de ω et du vecteur $\overrightarrow{O'M}$. Conclure.

»»»»»»«««««